

# کاربرد نظریه فراکتال‌ها در مهندسی نفت

این مقاله

دومین مقاله از

مجموعه مقالات

کاربرد نظریه

فراکتال مهم‌ترین  
و ساده‌ترین  
مشخصه هر

فراکتال می‌باشد. روش‌های گوناگونی برای یافتن بعد فراکتال وجود دارد که در این نوشتار روش جعبه‌های پوششی که ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین آنها است، بیان می‌کنیم.

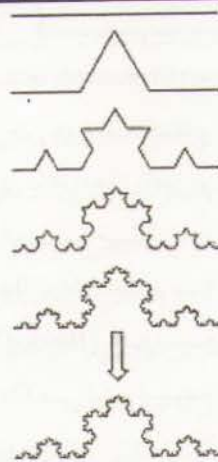
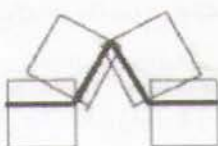
## روش جعبه‌های پوششی

در این روش همان‌طور که از نام آن برمی‌آید سعی می‌کنیم تمام سطح فراکتال را به کمک مربع‌هایی هم اندازه بپوشانیم. به‌عنوان مثال فراکتال زیر را که به منحنی کوچ معروف است، در نظر بگیرید. در مرتبه صفرم پاره‌خطی به طول یک را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و تکه میانی را حذف می‌نماییم. بار اول دو تکه هم‌اندازه دو پاره‌خط باقی‌مانده را همانند شکل زیر به آنها متصل می‌کنیم در این مرتبه طول هر پاره‌خط  $(1/3)$  بوده و می‌توانیم با 4 مربع کل سطح فراکتال را بپوشانیم (شکل ۱). در مرتبه بعد اگر این فرایند را تکرار کنیم دوباره به فراکتالی می‌رسیم که می‌توانیم با مربع به طول  $(1/3)^2$  کل سطح آن را بپوشانیم.

فراکتال‌ها در مهندسی نفت است که در این نشریه به نظر شما می‌رسد. در این مقالات نویسندگان سعی دارند ضمن بیان پاره‌ای از اصول و تعاریف مربوط به فراکتال‌ها، گوشه‌ای از کاربردهای این نظریه را در مهندسی نفت در هر مقاله مطرح سازند و تا حد امکان از مخازن ایران نمونه‌ای را به‌عنوان مثال بیاورند. در این بخش ابتدا توضیحاتی درباره برخی از ویژگی‌ها و تعریف فراکتال‌ها ارائه می‌شود و در ادامه به گوشه دیگری از کاربردهای آن در مهندسی نفت می‌پردازیم.

هرگاه یک محیط متخلخل را ایزوتروپیک فرض کنیم بدان معناست که هر پارامتر جهت‌دار همانند نفوذپذیری در آن محیط در تمام جهات مقدار یکسانی دارد. این ویژگی در فراکتال‌ها به‌نام خود متشابهی است به این مفهوم که هر بخش از فراکتال شبیه کل فراکتال دیده می‌شود. مثالی از خودمتشابهی، منحنی کوچ می‌باشد که در (شکل ۱) مراحل ساختن آن دیده می‌شود. در این حالت می‌توانیم کل فراکتال

را با یک بعد بیان نماییم. اما اگر پارامتر جهت‌دار در هر جهت مقدار خاصی داشته باشد- که در واقع این گونه است- در مهندسی نفت محیط متخلخل را غیر ایزوتروپیک می‌نامند و در نظریه فراکتال‌ها بدان خودترکیبی می‌گویند که در این حالت برای فراکتال باید چندین بعد تعریف نماییم. مثال بارز خودترکیبی سطح تماس آب و نفت در جبهه پیشرونده آب در تزریق آب می‌باشد که با نظریه فراکتال‌ها قابل بررسی است. همان‌گونه که گفتیم بعد



شکل 1. مراحل ساختن منحنی کوچ و یافتن بعد آن در مرتبه اول

در روش اول از فرمول شماره یک استفاده می‌کنیم. از روی نمودار فشار مویینگی نمودار توزیع اندازه حفرات را یافته و بعد از روی آن نمودار تعداد حفرات  $N(r)$  را بر حسب سایز  $(r)$  به صورت لگاریتمی  $(\log-\log)$  رسم می‌نماییم (شکل ۳). اگر از نمودار حاصله خط راستی عبور دهیم شیب این خط بیانگر بعد فراکتالی  $(D_f)$  نمونه است.

همان‌طور که دیده‌شد با ادامه فرایند مقادیر مرتبه اول، در مراحل بعد فقط به توان آن مرحله می‌رسند. رابطه یافتن بعد فراکتال در این روش به صورت:

$$N(r) \propto r^{-D_f} \quad (1)$$

است که  $N(r)$  بیانگر تعداد مربع‌های هم‌اندازه  $(4r)$ ،

نمایانگر طول مربع‌ها

$(1/3)$ ، و  $D_f$  بعد

فراکتال است، با

جایگذاری این مقادیر

در رابطه به مقدار

$(1.263)$  خواهیم رسید.

بنابراین بعد منحنی

کوچ  $(1.263)$

نشان می‌دهد ابعاد

فراکتالی بر خلاف

ابعاد اقلیدسی که

اعدادی صحیح‌اند،

اعشاری هستند.

**یافتن بعد**

**فراکتال در**

**مهندسی نفت**

برای یافتن بعد

فراکتال در مباحث

مهندسی نفت از

نمودارهای فشار

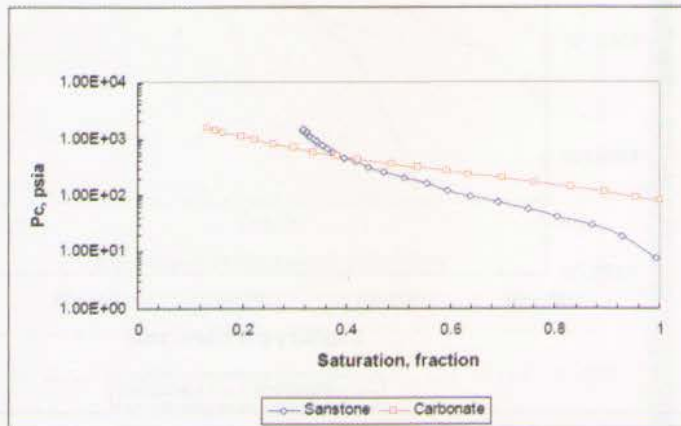
مویینگی

استفاده می‌نماییم که

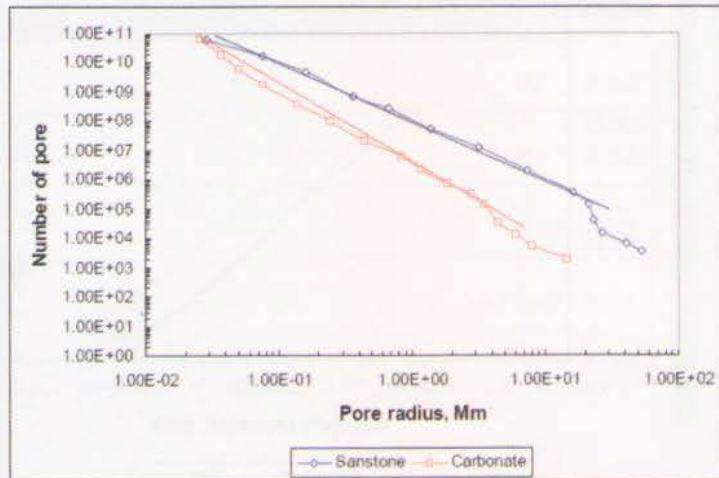
در مقاله قبل به

اختصار روابط اصلی

را مطرح کردیم. به دلیل



شکل 2. نمودار فشار مویینگی بزوش تزریق جیوه



شکل 3. نمودار تعداد حفرات بر حسب اندازه آنها

در روش دوم از مدل لوله‌های مویینه استفاده می‌کنیم. اگر لوله مویینه‌ای با طول  $(l)$  و شعاع  $(r)$  داشته باشیم  $[N(r)]$  در این حالت از فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$N(r) = \frac{V_{Hg}}{\pi r^2 l} \quad (2)$$

در این رابطه  $(V_{Hg})$  کل حجم جیوه ورودی به نمونه است. با مقایسه فرمول‌های یک و دو به دست می‌آید:

$$\frac{V_{Hg}}{\pi r^2 l} \propto r^{-D_f} \quad (3)$$

اهمیت بعد فراکتال در مباحث بعدی برای یافتن خصوصیات همچون تخلخل و نفوذپذیری و... برای محیط‌های متخلخل روش‌های مطرح شده در یافتن بعد فراکتال از طریق نمودارهای فشار مویینگی را با شرح بیشتر و اثبات فرمول‌ها مطرح و دو نمونه ماسه‌سنگی و کربناته از مخازن ایران را به عنوان مثال مطرح می‌کنیم.

برای یافتن بعد فراکتال برای هر نمونه سنگی ابتدا به کمک

آزمایش تزریق جیوه، نمودار فشار مویینگی را می‌یابیم که

نمودار حاصله برای نمونه‌ها در شکل ۲ دیده می‌شود.

شماره ۲۳ - تیر ۱۳۸۴

$$S_{Hg} = \frac{V_{Hg}}{V_p} \quad (7)$$

در رابطه اخیر ( $S_{Hg}$ ) درجه اشباع جیوه و حجم ( $V_p$ ) فضاهای خالی در نمونه می باشد. از روابط شش و هفت داریم:

$$S_{Hg} = aP_c^{-(2-D_f)} \quad (8)$$

از رابطه اخیر که در آن (a) ثابت است، استنباط می شود که اگر نمودار فشار مویینگی (به صورت لگاریتمی) را برحسب درصد درجه اشباع بروی نموداری رسم نموده (شکل ۴) و از نمودار حاصله خط راستی عبوردهیم شیب خط بیانگر بعد فراکتالی نمونه است.

در روش سوم از رابطه هشت برحسب ( $P_c$ ) مشتق می گیریم و به رابطه زیر می رسمیم:

$$\frac{dS_{Hg}}{dP_c} \propto P_c^{-(3-D_f)} \quad (9)$$

از رابطه بر می آید که اگر نمودار مشتق درجه اشباع جیوه را برحسب فشار مویینگی بروی نمودار لگاریتمی رسم نماییم (شکل ۵) و

خط راستی عبوردهیم، شیب خط نشان دهنده بعد فراکتالی نمونه خواهد بود.

اگر از مدل های سه بعدی لوله های مویینه به جای مدل های دوبعدی استفاده نماییم به رابطه زیر دست می یابیم:

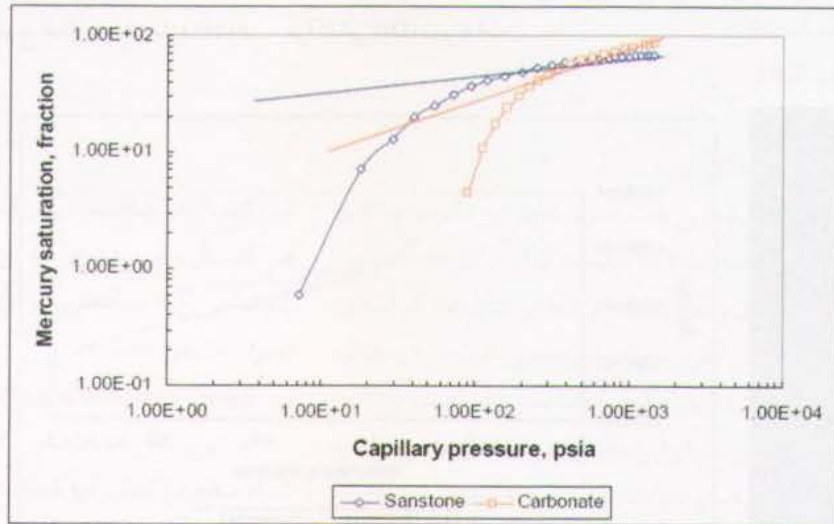
$$\frac{dS_{Hg}}{dP_c} \propto P_c^{-(4-D_f)} \quad (10)$$

که از نظر کاربرد همانند رابطه نهم (9) است. در روش چهارم از رابطه ۱۰ انتگرال گرفته و به جای اندیس

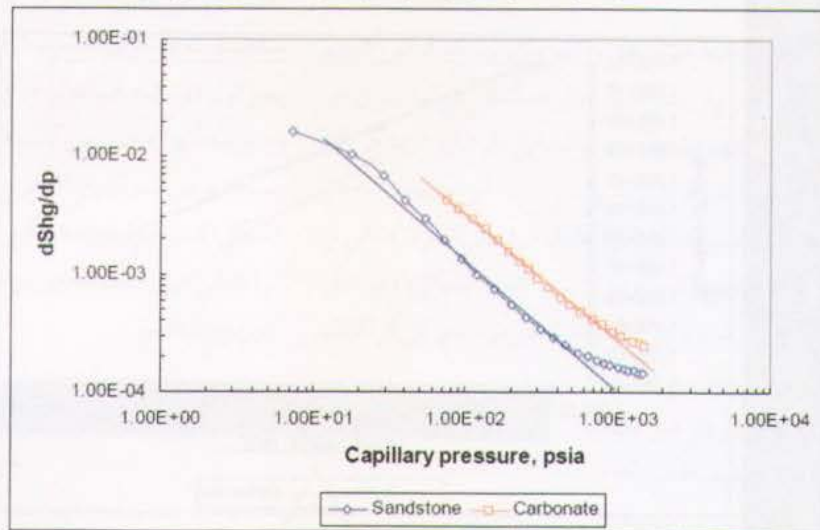
با مرتب کردن رابطه فوق داریم:

$$V_{Hg} \propto P_c^{2-D_f} \quad (4)$$

از رابطه فشار مویینگی نتیجه می شود:



شکل ۴. نمودار فشار مویینگی برحسب درصد اشباع جیوه



شکل ۵. نمودار فشار مویینگی برحسب مشتق درصد اشباع جیوه نسبت به فشار مویینگی

$$P_c = \frac{2\sigma \cos \theta}{r} \quad (5)$$

که در این رابطه ( $P_c$ ) فشار مویینگی، ( $\sigma$ ) کشش سطحی و ( $\theta$ ) زاویه تماس است. از روابط چهار و پنج به دست می آید که

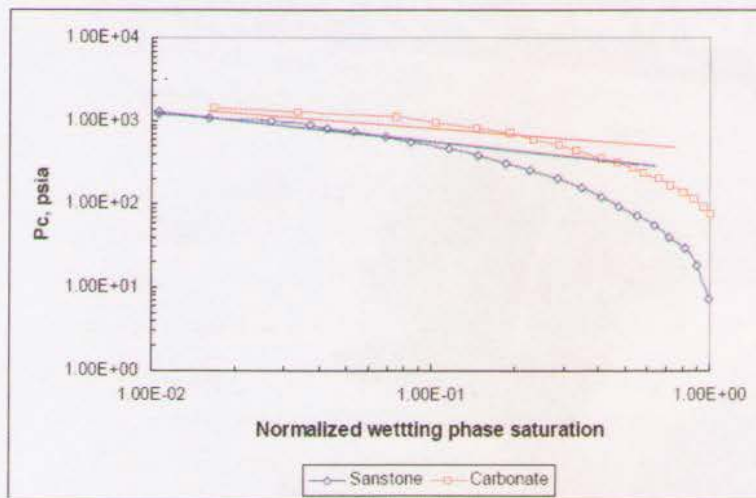
$$V_{Hg} \propto P_c^{-(2-D_f)} \quad (6)$$

درجه اشباع جیوه که در آزمایش نقش فاز ترنکننده را دارد از رابطه زیر حاصل می شود:

در ادامه این مجموعه در مورد انواع محیط‌های متخلخل فراکتالی و یافتن تخلخل در آنها بحث خواهیم کرد.

(Hg) از اندیس (nw) استفاده کرده و رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^{1-S_w} dS_{nw} = a \int_{P_c}^{P_c^*} P_c^{-(4-D_f)} dP_c \quad (12)$$



شکل 6. نمودار فشار موئینگی بر حسب درصد اشباع نرمال شده فاز ترکننده

در این رابطه ( $S_w$ ) درجه اشباع فاز ترکننده و ( $P_c$ ) فشار ورودی فاز ترکننده بوده که از روی نمودار فشار موئینگی به دست می‌آید. با انتگرال گیری به رابطه زیر می‌رسیم:

$$1 - S_w = b [P_c^{-(3-D_f)} - P_c^{-(3-D_f)}] \quad (13)$$

در این رابطه ( $b$ ) ثابت است. می‌دانیم که اگر درجه اشباع فاز ترکننده به مقدار ( $S_{nw} = 1 - S_{wr}$ ) برسد فشار موئینگی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و در این وضعیت داریم:

$$1 - S_{wr} = -b P_c^{-(3-D_f)} \quad (14)$$

با ترکیب روابط ۱۳ و ۱۴ نتیجه می‌شود:

$$\frac{1 - S_w}{1 - S_{wr}} = 1 - \left(\frac{P_c}{P_c^*}\right)^{-(3-D_f)} \quad (15)$$

و با مرتب کردن آن به رابطه زیر می‌رسیم:

$$P_c = P_c^* (S_w^*)^{\frac{1}{\lambda}} \quad (16)$$

که در آن ( $S_w^*$ ) درجه اشباع نرمال شده فاز ترکننده است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_w^* = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr}} \quad (17)$$

از رابطه ۱۶ مقدار بعد فراکتال از روی ( $\lambda = 3 - D_f$ ) حاصل می‌شود. بنابراین اگر نمودار فشار موئینگی را بر حسب درجه اشباع نرمال بر روی نمودار لگاریتمی رسم کنیم (شکل ۶) و از نمودار خط راستی عبور دهیم، با شیب خط، مقدار ( $\lambda$ ) و از روی آن بعد فراکتالی نمونه به دست می‌آید. در (جدول ۱) یک مقادیر بعد فراکتال محاسبه شده از چهار روش را برای دو نمونه ماسه‌سنگی و کربناته آورده ایم.

روش تعیین بعد فراکتال	ماسه سنگ	کربناته
روش اول	1/93	2
روش دوم	1/42	1/52
روش سوم	1/11	1/12
روش چهارم	1/32	1/57

جدول 1. بعد فراکتال محاسبه شده از چهار روش

منابع:

- Sahimi, M. and Yortsos, Y.C.: "Application of Fractal Geometry to Porous Media: -a Review," Paper SPE 20476 presented at the , New 1990 Annual Fall Meeting of the Society of Petroleum Engineers, September 23-26 1990 Orleans, LA.
- Li, K. and Horne, R.N.: "Fractal Characterization of the Geysers Rock", Presented at the GRC 2003 annual Meeting, October 12-15, 2003, Morelia, Mexico.
- Moarefian, M.: "Determining the Fractal Dimension by thUsing Capillary Pressure Curves", Presented at 9 Iranian Chemical Engineering Congress, November 23-25, 2004, Tehran, Iran.

۳۷  
شماره ۲۳ - تیر ۱۳۸۴