استفاده از روش مومنت جهت به دست آوردن رسانایی و شعاع کره مدفون

محمود اکبری[1]، مهدیه عرب بنی اسد[2]، یاسر صوفی[3] دانشجوی دکترای تخصصی ژئوفیزیک گرایش لرزه شناسی - دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران

چکیده

یکی از اهداف اکتشافی در عملیات لرزه‌نگاری، تعیین پارامترهای اجسام مدفون در زیر زمین است. برای تعیین این پارامترها روش‌های متفاوتی وجود دارد. به تازگی روش جدیدی به نام مومنت[4] ارائه شده است که با استفاده از این روش می‌توان پارامترهای فیزیکی اجسام مدفون، همچون ضخامت، رسانایی[5] و شعاع را به دست آورد. معادلات مومنت می‌توانند برای مؤلفه‌های افقی و عمودی و برای مرتبه‌های اول و دوم و nام به صورت آنالیزی نوشته شوند. به عبارت دیگر، با استفاده از معادلات مرتبه nام مومنت، می‌توان پارامترهای مجهول یعنی رسانایی و شعاع کره مدفون را تشخیص داد. توسط یک منبع دوقطبی مغناطیسی، یک میدان مغناطیسی به زمین اعمال می‌شود؛ در اثر اعمال این میدان مغناطیسی، کره مدفون در زمین، واکنش نشان داده و بنابراین می‌توان پاسخ کره را اندازه گیری نمود. پاسخ الکترومغناطیسی کره مدفون را می‌توان با استفاده از معکوس تبدیل لاپلاس[6]، از حوزه فرکانس[7] به حوزه زمان[8] انتقال داد و مومنت مرتبه nام، را برای کره مدفون به دست آورد.

هدف این مقاله تخمین رسانایی و شعاع کره مدفون، با استفاده از داده‌های الکترومغناطیس هوایی[9] و با به کار بردن روش مومنت است. در این تحقیق با استفاده از روش مذکور، مومنت یک کره مدفون محاسبه می‌گردد و از طریق معادله مومنت به دست آمده، رسانایی و شعاع آن تخمین زده می‌شود.

واژه‌های کلیدی روش مومنت، الکترومغناطیس هوایی، رسانایی، کره مدفون.

مقدمه

صرف‌نظر از روش مغناطیسی، متداول‌ترین روش در پی‌جویی کانی‌ها، تکنیک اکتشاف الکترومغناطیسی است. این روش با انتشار میدان‌های الکترومغناطیسی متغیر با زمان و کم فرکانس در داخل و بر روی سطح زمین سر و کار دارد. تعداد کمی از سیستم‌های EM (الکترومغناطیس) وجود دارند که در آنها چشمه انرژی با اتصال مستقیم به زمین وصل می‌شود، هر چند در این موارد معمولاً از سیستم اتصال القایی استفاده می‌شود. به هر حال دریافت علائم در آشکارساز همواره به طریق القایی انجام می‌شود.

مزیت ویژه جفت‌شدگی القایی، استفاده از سیستم‌های EM را در هواپیماها امکان‌پذیر می‌سازد. روش EM هوابردی، که غالباً با دستگاه‌های هوامغناطیسی همراه است، کاربرد گسترده‌ای در پی‌جویی‌های انجام شده در شناسایی کانی‌ها دارد.[۱]

یکی از اهداف اکتشافی در لرزه‌نگاری، تعیین پارامترهای اجسام مدفون در زیر زمین است. (پارامترهایی مثل رسانایی، شعاع، ضخامت و...). برای تعیین این پارامترها روش‌های متفاوتی وجود دارد. به تازگی روش جدیدی به نام مومنت ارائه گردیده است که با استفاده از این روش می‌توان پارامترهای اجسام مدفون را به‌دست آورد. در این مقاله، با استفاده از پاسخ کره رسانای مدفون واقع شده در میدان الکترومغناطیسی اعمال شده، رابطه مومنت مرتبه nام کره مذکور را به‌دست آورده و شعاع و رسانایی آن را تخمین می‌زنیم.

۱- روش مومنت

این روش اولین بار توسط آقای هارینگتون[10] معرفی شد. در این روش با استفاده از رابطه زیر و با بهره گیری از معکوس تبدیل لاپلاس، پاسخ الکترومغناطیسی کره مدفون را می توان به دست آورد.

$$M^n = \int_0^\infty t^n I(t)dt \qquad (۱)$$

در اثر اعمال میدان مغناطیسی به کره مدفون رسانا، کره به یک ماده فعال الکتریکی تبدیل شده و واکنش نشان می‌دهد. این پاسخ قابل اندازه گیری است و می‌توان این پاسخ را به دست آورد[۲و۳].

روش مومنت، قسمت وابسته به فرکانس پاسخ الکترومغناطیسی

کره مدفون (رابطه ۲) را با استفاده از معکوس تبدیل لاپلاس به حوزه زمان می‌برد و در ادامه با استفاده از رابطه کلی ۱، مومنت مرتبه‌nام پاسخ آنومالی را به‌دست می‌دهد. معادله مومنت به‌دست آمده با پاسخ آنومالی هم‌ارز است و تفاوت آنها در این است که روابط پاسخ آنومالی در حوزه فرکانس است، در حالی که روابط مومنت آنومالی در حوزه زمان است[۴]. می‌توان معادلات مومنت را برای مرتبه‌های مختلف به دست آورد. با توجه به تعداد مجهول‌ها، می‌توان معادلات مومنت را به‌دست آورد و به این ترتیب مجهولات مسأله تخمین زده می‌شوند.

به طور مثال در مسأله کره مدفون، اگر دو پارامتر رسانایی و شعاع کره، مجهول باشند، با محاسبه دو معادله مومنت غیر هم‌مرتبه قادر خواهیم بود تا دو پارامتر مجهول را تخمین بزنیم. به طور مثال مومنت مرتبه اول و دوم را برای کره مدفون به دست آورده و در این حالت دو معادله و دو مجهول داریم که می‌توانیم مجهولات را مشخص کنیم.

۲- محاسبه مومنت کره

گرانت[11] و وست[12] پاسخ الکترومغناطیسی یک کره در میدان مغناطیسی را به صورت زیر نشان داده‌اند[۱].

$$H_i = \frac{m_j}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}(x+iy)\frac{a^{2l+1}}{(rr_0)^{l+2}}F_i^j\{l, P_l^1(\cos v), P_l(\cos v)\} \quad (۲)$$

که H_i مؤلفه پاسخ کره در جهت i را مشخص می‌کند. در جهت شعاع (i=r) است، در جهت طول جغرافیایی (i=φ) است و در جهت عرض جغرافیایی نیز (i=v) می‌باشد[۱و۵].

در رابطه ۲، m_j گشتاور دوقطبی در جهت شعاع، یا در جهت عرض جغرافیایی و یا در جهت عمود بر عرض جغرافیایی را مشخص می‌کند. a شعاع کره و r_0 فاصله شعاعی از مرکز کره تا فرستنده است. r فاصله شعاعی تا گیرنده، V زاویه عرض جغرافیایی و F_i^j یک تابع وابسته به l و P_l است، که P_l ضرایب لژاندر[13] می‌باشند[۷و۸].

قسمت وابسته به فرکانس بخش x+iy است که توسط گرانت و وست با رابطه زیر بیان شده است.

$$x+iy = \frac{-\left(\frac{l+1/2}{ka}\right)I_{l+1/2}(ka) + I'_{l+1/2}(ka)}{\left(\frac{l+1/2}{ka}\right)I_{l+1/2}(ka) + I'_{l+1/2}(ka)} \quad (۳)$$

که $I_{l+1/2}$ تابع بسل[14] مرتبه l+1/2 است[۹و۱]. همچنین داریم:

$$k = \sqrt{i\omega\mu\sigma} \qquad , \qquad i^2 = -1 \quad (۴)$$

در اینجا برای سادگی کار از فرض $\mu=\mu_0$ استفاده می‌شود. رابطه ۳ را با استفاده از روابط برگشتی[15] که به صورت زیر تعریف می‌شوند ساده می‌کنیم[۶].

$$B_{\gamma-1}(z) - B_{\gamma+1}(z) = \frac{2\gamma}{z}B_\gamma(z) \quad (۵)$$

$$B'_\gamma(z) = B_{\gamma-1}(z) - \frac{\gamma}{z}B_\gamma(z) \quad (۶)$$

$$B_{\gamma-1}(z) + B_{\gamma+1}(z) = 2B'_\gamma(z) \quad (۷)$$

$$B'_\gamma(z) = B_{\gamma+1}(z) + \frac{\gamma}{z}B_\gamma(z) \quad (۸)$$

و در نتیجه داریم:

$$x+iy = \frac{I_{\gamma+1}(ka)}{I_{\gamma-1}(ka)} \quad (۹)$$

که در آن γ=l+1

معکوس تبدیل لاپلاس از x+iy را با E(t) نشان می‌دهیم و بنابراین خواهیم داشت:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts}\left[\frac{I_{\gamma+1}(ka)}{I_{\gamma-1}(ka)}\right]ds \quad (۱۰)$$

که s=iω. متغیر انتگرال را با استفاده از رابطه $S=\frac{\lambda^S}{\mu\sigma a^2}$ از S به λ تغییر می‌دهیم و در نتیجه خواهیم داشت:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ic'-\infty}^{ic'+\infty} e^{-\lambda^2 t/(\mu\sigma a^2)}\left[\frac{j_{\gamma+1}(\lambda)}{j_{\gamma-1}(\lambda)}\right]\frac{2\lambda}{\mu\sigma a^2}d\lambda \quad (۱۱)$$

با استفاده از قضیه مانده‌ها[16]، انتگرال به صورت زیر در می‌آید:[۶]

$$E(t) = \sum \lim_{\lambda\to\lambda_k}(\lambda\to\lambda_k)\, e^{-\lambda^2 t/(\mu\sigma a^2)}\left[\frac{j_{\gamma+1}(\lambda)}{j_{\gamma-1}(\lambda)}\right]\frac{2\lambda}{\mu\sigma a^2} \quad (۱۲)$$

که λk ریشه $j_{\gamma-1}(\lambda)$ است. $j_{\gamma-1}(\lambda)$ را با ۱۶استفاده از سری تیلور[17] بسط می‌دهیم و $\lambda=\lambda_k$ قرار می‌دهیم. نهایتاً رابطه زیر به دست می‌آید.

$$E(t) = \sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\left[\frac{j_{\gamma+1}(\lambda_k)}{j'_{\gamma-1}(\lambda_k)}\right]\frac{2\lambda}{\mu\sigma a^2} \quad (۱۳)$$

با استفاده از رابطه برگشتی، رابطه‌ی ۱۳ را به صورت ساده‌تری بیان می‌کنیم.

$$E(t)=\sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\left[\frac{j_{\gamma+1}(\lambda_k)}{-\frac{1}{2\gamma}j_{\gamma+1}(\lambda_k)}\right]\frac{2\lambda}{\mu\sigma a^2} \qquad (۱۴)$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$E(t)=\sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2\gamma}}\right]\frac{2\lambda}{\mu\sigma a^2} \qquad (۱۵)$$

و نهایتاً به رابطه زیر می‌رسیم.

$$E(t)=\sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\frac{4\gamma}{\mu\sigma a^2} \qquad (۱۶)$$

همان‌طور که مشخص است، آنچه که در رابطه ۱۶ به دست آورده شده است فقط به زمان بستگی دارد. حال با توجه به رابطه مومنت (رابطه ۱)، مومنت معکوس تبدیل لاپلاس را به دست می‌آوریم.

$$M^n=\int_0^\infty t^n\,E(t)dt=\int_0^\infty t^n\Big(-\sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\frac{4\gamma}{\mu\sigma a^2}\Big)\,dt \qquad (۱۷)$$

ابتدا مومنت مرتبه صفر را به دست می‌آوریم.

$$M^0=\int_0^\infty\Big(-\sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\frac{4\gamma}{\mu\sigma a^2}\Big)dt \qquad (۱۸)$$

یاد آوری می کنیم که $\gamma=l+1$ است. بنابراین:

$$M^0=-\int_0^\infty\sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\frac{4\gamma}{\mu\sigma a^2}dt=4\gamma\sum_k\frac{1}{\lambda_k^2} \qquad (۱۹)$$

$$\rightarrow\ M^0=4\gamma\sum_k\frac{1}{\lambda_k^2} \qquad (۲۰)$$

واتسون[۱۸] نشان داد که جمع معکوس مربعات ریشه‌های تابع بسل برابر است با:

$$\sum_k\frac{1}{\lambda_k^2}=\frac{1}{4\gamma} \qquad (۲۱)$$

بنابراین می‌توان گفت که مومنت مرتبه صفر از E(t) برابر یک است. یعنی:

$$M^0=4\gamma\frac{1}{4\gamma}=1 \qquad (۲۲)$$

اکنون به محاسبه مومنت‌های مرتبه بالاتر می‌پردازیم. مومنت‌های مرتبه بالاتر از E(t) را می‌توانیم به صورت زیر به دست آوریم.

$$M^n=\int_0^\infty t^n\,E(t)dt=\int_0^\infty t^n\Big(-\sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\frac{4\gamma}{\mu\sigma a^2}\Big)\,dt \qquad (۲۳)$$

$$M^n=\frac{-4\gamma}{\mu\sigma a^2}\int_0^\infty t^n\sum_k e^{-\lambda_k^2 t/(\mu\sigma a^2)}\,dt \qquad (۲۴)$$

$$M^n=\frac{4\gamma}{\mu\sigma a^2}\mathrm{n}!\,(\mu\sigma a^2)^{\mathrm{n}+1}\sum_k\frac{1}{(\lambda_k^2)^{n+1}} \qquad (۲۵)$$

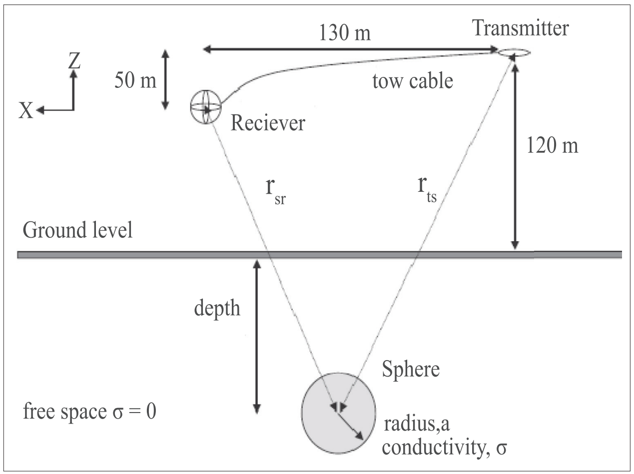
پس به طور کلی می‌توان مومنت مرتبه nام یک کره را به صورت کلی زیر نشان داد.

$$M^n=6\mathrm{n}!\,(\mu\sigma a^2)^{\mathrm{n}}\frac{2^{2\mathrm{n}+1}\mathrm{B}_{2\mathrm{n}+2}}{(2\mathrm{n}+2)!} \qquad (۲۶)$$

$B_{(2n+2)}$، عدد برنولی[۱۹] است[۶].

همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادله مومنت کره مدفون (رابطه ۲۶) به دو پارامتر رسانایی و شعاع کره بستگی دارد. بنابراین با نوشتن دو معادله غیر هم‌مرتبه مومنت، یک دستگاه دو معادله و دو مجهول خواهیم داشت که به سادگی قادر به تخمین پارامترهای رسانایی و شعاع کره مذکور خواهیم بود.

شکل ۱ نحوه قرارگیری سیستم فرستنده، گیرنده و مدل کره را به صورت هندسی نشان می‌دهد. به طور معمول و با



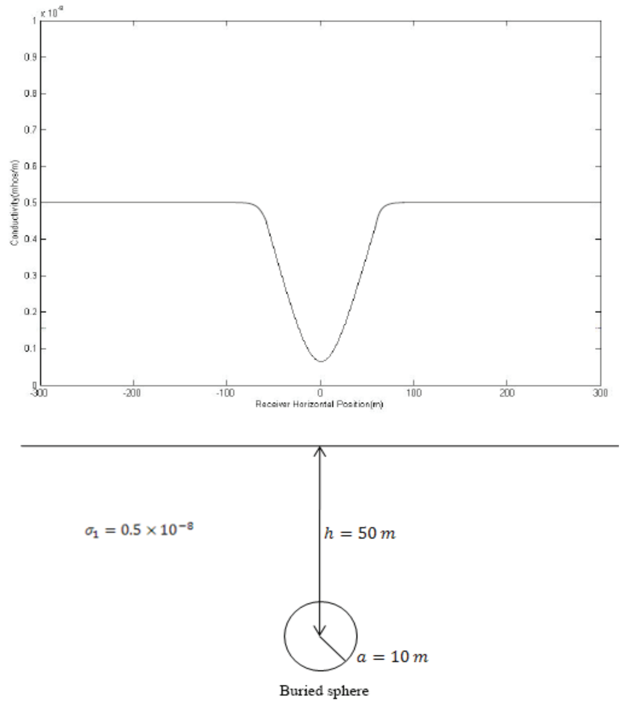
شکل ۱ | آرایش هندسی سیستم الکترومغناطیس هوایی و مدل کره

جدول ۱ | پارامترهای آزمایشگاهی سیستم الکترومغناطیس هوایی و مدل کره مدفون

پاسخ کره در مبدا	۳۴۸/۹۲
عمق کره مدفون	۵۰ متر
رسانایی زمین	5×10^{-9}
ارتفاع فرستنده	۱۲۰ متر
شعاع سیم پیچ فرستنده	۰/۴ متر
جریان سیم پیچ فرستنده	۱/۱ A
ارتفاع گیرنده	۷۰ متر

توجه به ساختار زمین‌شناسی منطقه، سیستم فرستنده در ارتفاع ۱۲۰ متری از سطح زمین و به صورت افقی حرکت می کند و سیستم گیرنده نیز به صورت افقی حرکت کرده و در فاصله ۱۳۰ متری پشت فرستنده و در ارتفاع ۷۰ متری از سطح زمین قرار می گیرد.

در یک مدل سازی آزمایشگاهی، با انتخاب پارامترهای ارائه شده در جدول ۱، نمودار رسانایی کره مدفون به صورت شکل ۲ حاصل شده است.



شکل ۲ | نمودار رسانایی کره مدفون مربوط به پارامترهای جدول ۱

نتیجه گیری

با اعمال میدان الکترومغناطیسی، کره مدفون رسانا به یک ماده الکتریکی فعال تبدیل خواهد شد. در این حالت پاسخ کره نیز به میدان اعمال شده و این پاسخ قابل اندازه‌گیری خواهد بود. با استفاده از این پاسخ و با توجه به رابطه کلی مومنت، قادر خواهیم بود تا روابط مومنت را بیان کرده و رسانایی و شعاع کره مذکور را تخمین بزنیم.

پانویس‌ها

1. m.akbari@srbiau.ac.ir
2. ma.baniasad@gmail.com
3. y.soufi@srbiau.ac.ir
4. Moment
5. Conductivity
6. Inverse Laplace transform
7. Frequency domain
8. Time domain
9. Airborne electromagnetic data
10. Harrington
11. Grant
12. West
13. Legendre coefficients
14. Bessel function
15. Recurrence Relations
16. Residue Theorem
17. Taylor series
18. Watson
19. Bernoullian number

منابع

[1] Grant, F.S., West, G.F., 1965. Interpretation Theory in Applied Geophysics. McGraw-Hill, New York, 584 pp.
[2] Harrington, Roger F., 1968, Field computation by moment methods, New York.
[3] March, H. W., 1953, The field of a magnetic dipole in the presence of a conducting sphere, Geophysics, 18, 671-684.
[4] Smith, R.S., Lee, T.J., 2002, The moments of the impulse response: a new paradigm for the interpretation of transient electromagnetic data, Geophysics.
[5] Nabighian, M. N., 1970, Quasi-static transient response of a conducting permeable sphere in a dipolar field, Geophysics, 35, 303-309.
[6] Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1965, Handbook of Mathematical Functions, New York.
[7] Singh, S. K., 1973, Electromagnetic transient response of a conducting sphere embedded in a conductive medium, Geophysics, 38, 864-893.
[8] Lee, T., 1975, Transient electromagnetic response of a sphere in a layered medium, Geophysics Prospecting, 23, 492-512.
[9] Lodha, G. S., West, G. F., 1976, Practical airborne EM (AEM) interpretation using a sphere model, Geophysics, 41, 1157-1169.