

# کاربرد نظریه فراکتال ها در مهندسی نفت

مهدی معارفیان - فرید احمدلو

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه صنعتی شریف

## تاریخچه

ریشه هندسه فراکتال ها به اواخر قرن نوزدهم میلادی برمی گردد زمانی که ریاضیدانان اولین چالش ها و مشکلات را در اصول هندسه اقلیدسی مشاهده نمودند. ایده ابعاد فراکتالی برای اولین بار در سال ۱۹۱۹ میلادی توسط یک ریاضیدان آلمانی به نام F. Hausdorff در مورد اشکال ریاضی با ساختار زیر مطرح گردید که این ایده توسط یک ریاضیدان روسی به نام A.S. Besicovitch بسط و توسعه داده شد.

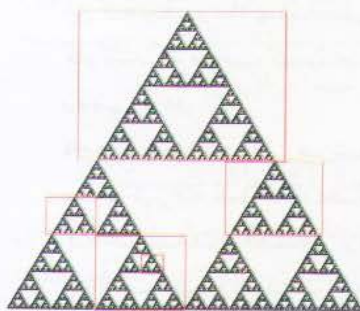
نظریه فراکتال ها بدان صورت که امروز مطروح است بیشتر مدیون کارهای تحقیقاتی B. Mandelbrot می باشد. وی توانست در سال ۱۹۷۵ تئوری فراکتال ها را بسط داده و مقالاتی را در زمینه هندسه فراکتال ها منتشر سازد که تا امروز مورد توجه دانشمندان است.

است. این تعریف اشاره به خاصیت خودمتشابهی در تعریف فراکتال دارد. بدان معنا که هر بخش از منحنی یا سطح به طور کامل مشابه کل منحنی یا سطح می باشد. شکل شماره ۱ مثالی در از دیگر ویژگی های فراکتال ها علاوه بر خود متشابهی که در اغلب فراکتال ها دیده می شود، می توان به روند تکراری و حلقه های بازخوری در به وجود آوردن فراکتال ها اشاره نمود. (شکل شماره ۲) مهم ترین مشخصه هر فراکتالی بعد آن می باشد. بعد فراکتال به ما اجازه می دهد تا میزان پیچیدگی فراکتال را تعیین نماییم. از هندسه اقلیدسی به یاد داریم که مربع و مکعب به ترتیب بعد یک، دو و سه دارند و می توانستیم طول، سطح و حجم آنها را به راحتی به دست آوریم. اما در مورد اشکال فراکتالی مثل سواحل دریاها یا حاشیه جزایر کاربردین سادگی نبوده و برای آنها باید ابعاد فراکتالی بیابیم. برای به دست آوردن بعد فراکتال روش های مختلفی وجود دارد، اما از بین آنها

## مقدمه ای بر نظریه فراکتال ها

کلمه فراکتال برای اولین بار توسط Mandelbrot در سال ۱۹۸۲ به کار گرفته شد که از کلمه لاتین "Fractus" به معنای شکسته شده اقتباس شده است.

در ساده ترین تعریف از فراکتال، آن را یک الگوی هندسی که می تواند در هر مقیاسی تکرار شده و با هندسه کلاسیک قابل توصیف نیست تعریف می کنند. بر مبنای تعریف Mandelbrot فراکتال منحنی یا سطحی است که مستقل از مقیاس



شکل ۱- خاصیت خود متشابهی در فراکتال



شکل ۲- خاصیت تکراری در به وجود آوردن فراکتال

مهم‌ترین روش در مهندسی مخازن، استفاده از نمودارهای فشار موینگی می‌باشد.

## روش‌های یافتن بعد فراکتال به وسیله نمودارهای موینگی

ابتدا باید برای نمونه سنگی خویش به کمک تزریق جیوه نمودارهای فشار موینگی را به دست آوریم. از هر دو نمودار تخلیه و آشام می‌توانیم بعد فراکتال را بیابیم زیرا نتایج حاصل از هر دو نمودار تقریباً یکسان است. به دلیل آنکه زاویه تماس و کشش سطحی جیوه، مشخص و در طول آزمایش ثابت می‌باشد از تزریق جیوه برای به دست آوردن نمودارهای فشار موینگی استفاده می‌نماییم.

**روش اول:** اولین روش برای یافتن بعد فراکتال استفاده از فرمول پایه به قرار زیر می‌باشد:

$$N(r) \propto r^{-D_f} \quad (1)$$

در این فرمول  $N(r)$  بیانگر تعداد حفراتی است که همگی اندازه یکسان  $r$  داشته باشند و  $D_f$  بیانگر بعد فراکتال می‌باشد. برای استفاده از این فرمول باید علاوه بر نمودارهای فشار موینگی نمودارهای توزیع اندازه حفرات را نیز به دست آورده و با استفاده از آن نمودار  $N(r)$  برحسب  $r$  را رسم نماییم و با یافتن شیب خط حاصله بعد فراکتال بر بیابیم.

**روش دوم:** با در نظر گرفتن محیط متخلخل به صورت مجموعه‌ای از لوله‌های موینه و با استفاده از تعریف فشار موینگی و اشباع می‌توان

نشان داد که:

$$S_{Hg} = aP_c^{-(2-D_f)} \quad (2)$$

در فرمول فوق  $S_{Hg}$  بیانگر درجه اشباع جیوه،  $P_c$  بیانگر فشار موینگی و  $a$  نیز یک ثابت می‌باشد. همان‌طور که از فرمول برمی‌آید با داشتن نمودار فشار موینگی برحسب میزان اشباع جیوه می‌توان به راحتی  $D_f$  را که بیانگر بعد فراکتال می‌باشد محاسبه کرد.

**روش سوم:** با مشتق گرفتن از طرفین فرمول اخیر برحسب  $P_c$  به رابطه زیر می‌رسیم که روش دیگری در یافتن بعد فراکتال است:

$$\frac{dS_{Hg}}{dP_c} \propto P_c^{-(3-D_f)} \quad (3)$$

فرمول فوق نشان می‌دهد که با رسم  $\frac{dS_{Hg}}{dP_c}$  برحسب  $P_c$  نیز می‌توان بعد فراکتال را محاسبه کرد. اگر از مدل سه بعدی محیط متخلخلی به جای محیط دو بعدی لوله‌های موینه استفاده نماییم فرمول به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{dS_{Hg}}{dP_c} \propto P_c^{-(4-D_f)} \quad (4)$$

**روش چهارم:** در این روش با

انتگرال گیری از فرمول چهارم و استفاده از یکسری ساده سازی می‌توانیم به فرمول

معروف Brooks-Corey در مورد فشار موینگی به قرار زیر برسیم:

$$P_c = P_c(S_w^*)^{-\frac{1}{\lambda}} \quad (5)$$

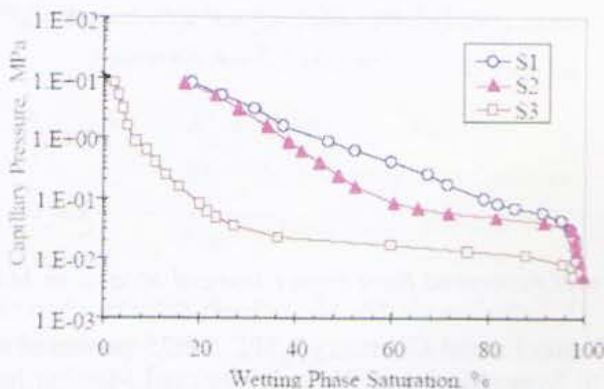
در فرمول اخیر  $P_c$  فشار موینگی ورود و  $\lambda$  بیانگر اندیس توزیع اندازه حفرات بوده و  $S_w^*$  نرمال شده درجه اشباع فاز ترکننده است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_w^* = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{wr}} \quad (6)$$

بعد فراکتال به کمک نمودار فشار موینگی و رابطه پنجم با استفاده از فرمول " $\lambda=3-D_f$ " قابل محاسبه می‌باشد.

## بحث و نتیجه گیری

در این بخش نتایج آزمایشات K. Li در سال ۲۰۰۴ را در رابطه با چهار روش فوق بیان می‌کنیم. در آزمایشات انجام گرفته سه نمونه ماسه سنگ از مخازن نفتی انتخاب شده و بر روی هر سه نمونه، آزمایش تزریق جیوه برای به دست آوردن نمودار فشار موینگی انجام شده است. نمودارهای حاصله را می‌توانید در شکل شماره ۳ مشاهده نمایید.

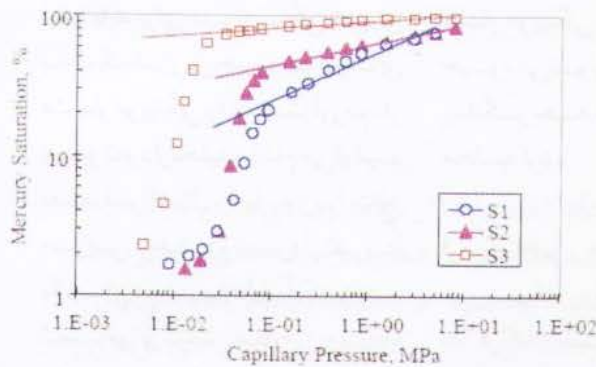


شکل ۳- نمودار فشار موینگی حاصله از تزریق جیوه شکل

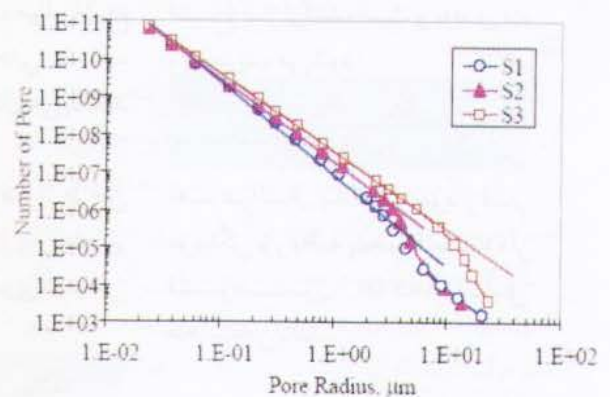
در شکل شماره ۶ دیده می شود. در روش چهارم نمودار فشار مویینگی را برحسب درجه اشباع نرمال شده رسم می کنیم که در شکل شماره ۷ نتیجه این کار برای سه نمونه مطرح شده دیده می شود. مقادیر بعد فراکتال از روی نمودارها حاصل خواهد شد. ■

برای روش دوم نمودار فشار مویینگی را برحسب درجه اشباع جیوه رسم می نمایم. نمودار به دست آمده در شکل شماره ۵ مشاهده می شود. در روش سوم باید نمودار فشار مویینگی را برحسب مشتق درجه اشباع جیوه نسبت به فشار مویینه رسم نمایم که

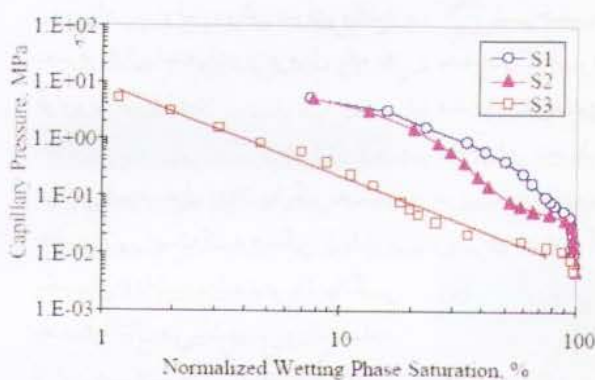
بعد از آزمایش تزریق جیوه می توانیم نمودار توزیع اندازه را به دست آوریم و با توجه به آن نمودار اندازه حفرات برحسب تعداد آنها را رسم نمایم. شیب این نمودار بیانگر بعد فراکتال بوده که روش اول یافتن آن است و در شکل شماره ۴ دیده می شود.



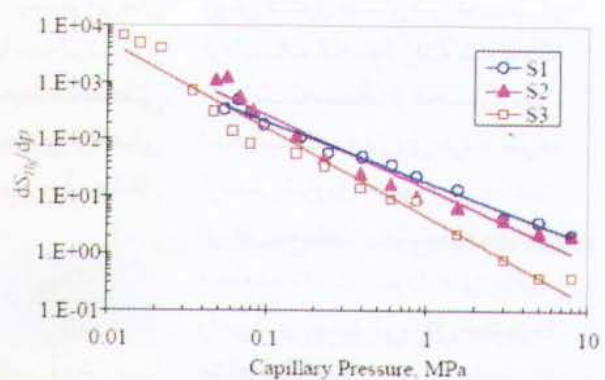
شکل ۵- نمودار فشار مویینگی برحسب درجه اشباع جیوه (روش دوم)



شکل ۴- نمودار تعداد حفرات برحسب اندازه آنها (روش اول)



شکل ۷- نمودار فشار مویینگی برحسب درجه اشباع نرمال شده (روش چهارم)



شکل ۶- نمودار فشار مویینگی برحسب مشتق درجه اشباع جیوه نسبت به فشار مویینگی (روش سوم)

منابع و مراجع:

1. Sahimi, M., *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock from Classical Models to Modern Approaches*, VCH, Weinheim, Germany, 1995.
2. Li, K.: "Characterization of Rock Heterogeneity Using Fractal Geometry," SPE 86975 presented at the 2004 International Thermal Operations and Heavy Oil Symposium and Western Regional Meeting held in Bakersfield, California, U.S.A., March 16-18, 2004.
3. Moarefian, M.: "Determining the Fractal Dimension by Using Capillary Pressure Curves," 9<sup>th</sup> Iranian Chemical Engineering Congress, Tehran, IRAN, November 23-25, 2004.